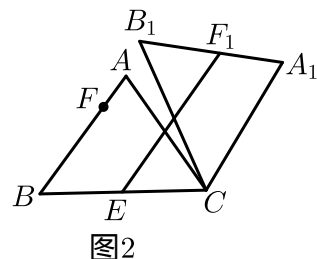
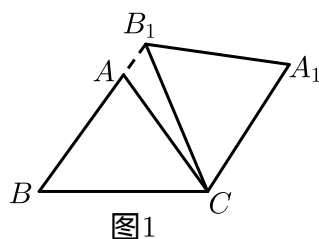


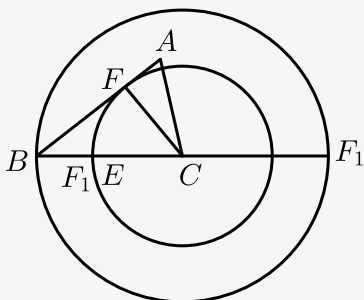
第3讲几何变换之旋转（练习）

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ．将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转，得到 $\triangle A_1B_1C$ ．如图2，点 E 是 BC 上的中点，点 F 为线段 AB 上的动点．在 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转过程中，点 F 的对应点是 F_1 ，求线段 EF_1 长度的最大值与最小值的差．



【答案】 $\frac{36}{5}$.

【解析】 如图，过 C 作 $CF \perp AB$ 于 F ，以 C 为圆心 CF 为半径画圆交 BC 于 F_1 ， EF_1 有最小值，



此时在 $\text{Rt}\triangle BFC$ 中， $CF = \frac{24}{5}$ ，

$$\therefore CF_1 = \frac{24}{5},$$

$$\therefore EF_1 \text{的最小值为} \frac{24}{5} - 3 = \frac{9}{5},$$

如图，以 C 为圆心 BC 为半径画圆交 BC 的延长线于 F_1 ， EF_1 有最大值；

$$\text{此时 } EF_1 = EC + CF_1 = 3 + 6 = 9,$$

$$\therefore \text{线段 } EF_1 \text{的最大值与最小值的差为 } 9 - \frac{9}{5} = \frac{36}{5}.$$

【标注】 【知识点】 旋转性质综合应用

2. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(2, 0)$ ，点 $B(0, 2\sqrt{3})$ ，点 $O(0, 0)$ ， $\triangle AOB$ 绕着点 O 顺时针旋转，得 $\triangle A'OB'$ ，点 A ， B 旋转后的对应点为 A' ， B' ，记旋转角为 α ．

(1) 如图1，若 $\alpha = 30^\circ$ ，求点 B' 的坐标．

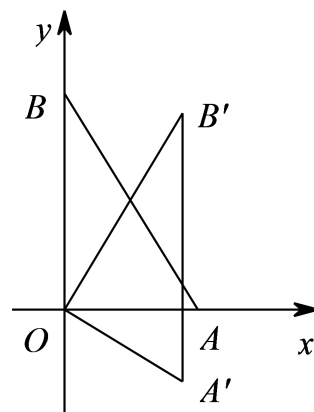


图1

(2) 如图2, 若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 设直线 AA' 和直线 BB' 交于点 P , 求证: $AA' \perp BB'$.

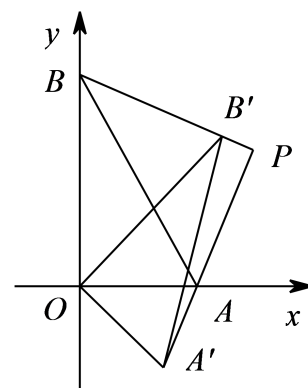


图2

(3) 若 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$, 求 (2) 中的点 P 纵坐标的最小值 (直接写出结果即可) .

【答案】 (1) 点 B' 的坐标为 $(\sqrt{3}, 3)$.

(2) 证明见解析 .

(3) 点 P 纵坐标的最小值为 $\sqrt{3} - 2$.

【解析】 (1) 如图所示, 由题意可知: $\angle BOB' = 30^\circ$, $OB = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore \angle B'OA = 60^\circ,$$

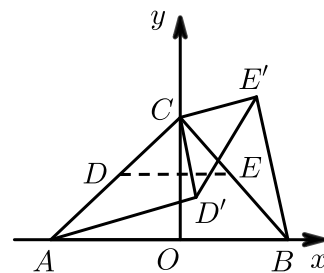
$$\therefore \angle OB'A' = 30^\circ,$$

$$\therefore OB' = OB = 2\sqrt{3},$$

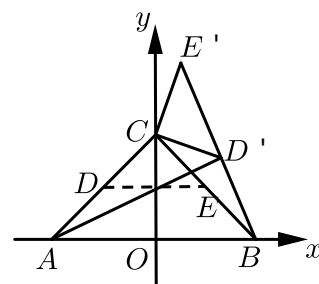
$$\therefore \text{点 } B' \text{ 的横坐标为 } \sqrt{3},$$

$$\text{由勾股定理, 得: 纵坐标为 } \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3,$$

$$\therefore \text{点 } B' \text{ 的坐标为 } (\sqrt{3}, 3).$$



(2) 如图, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 当点 D' 落在线段 BE' 上时, 求 $\sin \angle CBE'$ 的值.



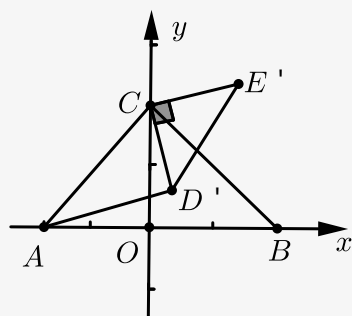
(3) 直线 AD' 与直线 BE' 相交于点 P , 求点 P 的横坐标 m 的取值范围 (直接写出结果即可)

【答案】 (1) $\alpha = 60^\circ$.

(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(3) $-\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$.

【解析】 (1) 如图,



$\because AD' \parallel CE'$,

$\therefore \angle AD'C = \angle E'CD' = 90^\circ$,

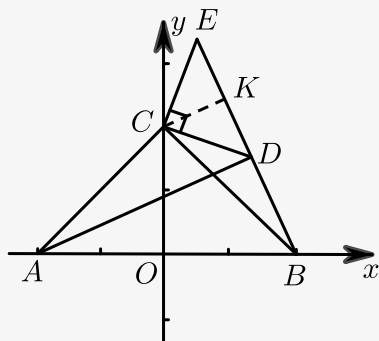
$\because AC = 2CD'$,

$\therefore \angle CAD' = 30^\circ$,

$\therefore \angle ACD' = 90^\circ - \angle CAD' = 60^\circ$,

$\therefore \alpha = 60^\circ$.

(2) 如图, 做 $CK \perp BE'$ 于 K .



$$\because AC = BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \therefore CD' = CE' = \sqrt{2},$$

$$\because \triangle CD'E' \text{ 是等腰直角三角形, } CD' = CE' = \sqrt{2},$$

$$\therefore D'E' = 2,$$

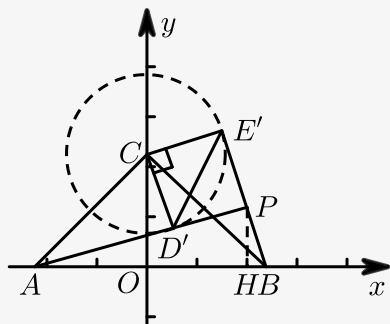
$$\because CK \perp D'E',$$

$$\therefore KD' = E'K,$$

$$\therefore CK = \frac{1}{2}D'E' = 1,$$

$$\therefore \sin \angle CBE' = \frac{CK}{BC} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(3) 如图, 以 C 为圆心 $\sqrt{2}$ 为半径作 $\odot C$, 当 BK' 与 $\odot C$ 相切时 AP 最长, 则四边形 $CD'PE'$ 是正方形, 作 $PH \perp AB$ 于 H .



$$\because AP = AD' + PD' = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

$$\because \cos \angle PAB = \frac{AP}{AB} = \frac{AH}{AP},$$

$$\therefore AH = 2 + \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 横坐标的最大值为 } \sqrt{3}.$$

如图: 当 BE' 与 $\odot C$ 相切时 AP 最短, 则四边形 $CD'PE'$ 正方形, 作 $PH \perp AB$ 于 H .

根据对称性可知 $OH = \sqrt{3}$, $\therefore$ 点 P 横坐标的最小值为 $-\sqrt{3}$,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 横坐标的取值范围为 } -\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}.$$

$$\text{在}\triangle ACE\text{和}\triangle ABD\text{中}, \begin{cases} AC = AB \\ \angle CAE = \angle BAD, \\ AE = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ABD (\text{SAS}),$$

$$\therefore CE = BD.$$

(2) 根据题意: $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle CAB = \angle EAD = 90^\circ$,

$$\text{在}\triangle ACE\text{和}\triangle ABD\text{中}, \begin{cases} AC = AB \\ \angle CAE = \angle BAD, \\ AE = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ABD (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle AEC = 90^\circ, \text{ 且 } \angle AEC = \angle FEB,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle FEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFB = 90^\circ,$$

$$\therefore CF \perp BD,$$

$$\therefore AB = AC = \sqrt{2} + 1, AD = AE = 1, \angle CAB = \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} + 2, CD = AC + AD = \sqrt{2} + 2,$$

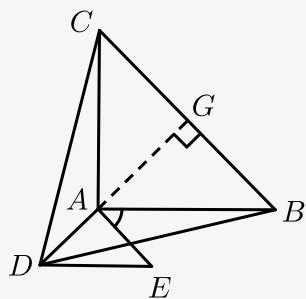
$$\therefore BC = CD,$$

$$\therefore CF \perp BD,$$

$$\therefore CF \text{ 是线段 } BD \text{ 的垂直平分线}.$$

(3) $\triangle BCD$ 中, 边 BC 的长是定值, 则 BC 边上的高取最大值时 $\triangle BCD$ 的面积有最大值,

$\therefore$ 当点 D 在线段 BC 的垂直平分线上时, $\triangle BCD$ 的面积取得最大值, 如图:



$$\therefore AB = AC = \sqrt{2} + 1, AD = AE = 1, \angle CAB = \angle EAD = 90^\circ, DG \perp BC \text{ 于 } G,$$

$$\therefore AG = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}, \angle GAB = 45^\circ,$$

$$\therefore DG = AG + AD = \frac{\sqrt{2} + 2}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2} + 4}{2}, \angle DAB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

,

$\therefore \triangle BCD$ 的面积的最大值为：

$$\frac{1}{2}BC \cdot DG = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} + 2) \times \left(\frac{\sqrt{2} + 4}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2} + 5}{2},$$

旋转角 $\alpha = 135^\circ$.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

5. 如图1, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 线段 BD 可绕点 B 在平面内旋转, $BD = 4$.

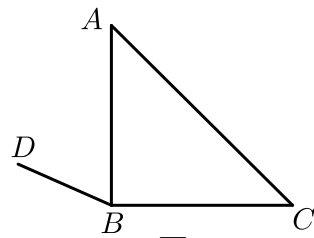


图1

- (1) 若 $AB = 8$, 在线段 BD 旋转过程中, 当点 B, C, D 三点在同一直线上时, 直接写出 CD 的长 _____ .
- (2) 如图2, 若将线段 BD 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° , 得到线段 BE , 连接 AE, CE .

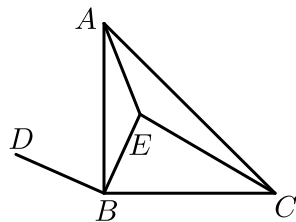


图2

- ① 当点 D 的位置由 $\triangle ABC$ 外的点 D 转到其内的点 E 处, 且 $\angle AEB = 135^\circ$, $AE = 2\sqrt{5}$ 时, 求 CE 的长 .
- ② 如图3, 若 $AB = 8$, 连接 DE , 将 $\triangle BDE$ 绕点 B 在平面内旋转, 分别取 DE, AE, AC 的中点 M, P, N , 连接 MP, PN, NM , 请直接写出 $\triangle MPN$ 面积 S 的取值范围 _____ .

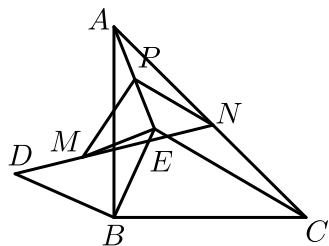


图3

【答案】 (1) 4或12

(2)① $2\sqrt{13}$.

② $2 \leq S \leq 18$

【解析】(1) 当 D 点在线段 BC 上时 ,

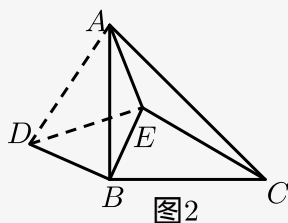
$$CD = BC - BD = AB - BD = 8 - 4 = 4 ,$$

当 D 点在线段 CB 的延长线上时 ,

$$CD = BC + BD = AB + BD = 8 + 4 = 12 ,$$

故 CD 的长为 4 或 12 .

(2)① 连结 AD , DE ,



$\therefore$ 线段 BD 绕点 B 顺时针旋转 90° 得到线段 BE ,

$$\therefore BD = BE , \angle DBE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DBE ,$$

$$\therefore \angle ABC - \angle ABE = \angle DBE - \angle ABE ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBE ,$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle BCE$ 中 ,

$$\begin{cases} BA = BC \\ \angle ABD = \angle CBE , \\ BD = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle BCE ,$$

$$\therefore AD = CE ,$$

$$\therefore \angle BED = \angle BDE = 45^\circ , \angle AEB = 135^\circ ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle AEB - \angle BED = 90^\circ ,$$

$$\therefore BD = 4 ,$$

$$\therefore DE = \sqrt{2}BD = 4\sqrt{2} ,$$

$$\therefore AE = 2\sqrt{5} ,$$

$$\therefore AD = CE = \sqrt{AE^2 + DE^2} = 2\sqrt{13} ,$$

$$\therefore CE \text{ 的长为 } 2\sqrt{13} .$$

② 连结 AD , 延长 CE 交 AD 于 H ,

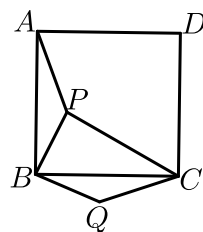


图 1

- (2) 【问题探究】如图(2), P 是等边 $\triangle ABC$ 内一点, 连接 PA 、 PB 、 PC , 若 $PA = 4$, $PB = 2$, $PC = 2\sqrt{5}$, 求 $\angle APB$ 的度数.

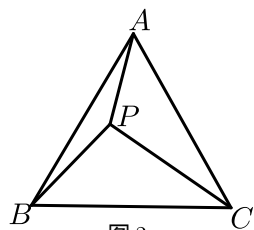


图 2

- (3) 【问题解决】如图(3), 长方形 $ABCD$ 是一个花园, 其中 $AB = 900$ 米, $AD = 600$ 米, 顶点 A 、 B 为两个入口, 现准备在公园内建立一个标志性景点 P , 在 CD 边上 (含 C 、 D 两点) 再设立一个入口 Q , 并修建三条通往景点 P 的小路 PA 、 PB 、 PQ , 求这三条小路长度之和的最小值.

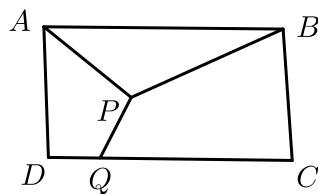


图 (3)

【答案】(1) $2\sqrt{2}$

(2) $\angle APB = 150^\circ$.

(3) 这三条下路之和的最小值是 $(450\sqrt{3} + 600)$ m.

【解析】(1) $\because \triangle ABP$ 绕点 B 顺时针旋转与 $\triangle CBQ$ 重合,

四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \triangle ABP$ 绕点 B 顺时针旋转 90° ,

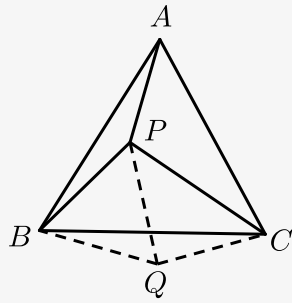
$\therefore \angle PBQ = 90^\circ$, $PB = QB = 2$,

$\therefore PQ = \sqrt{2}PB = 2\sqrt{2}$.

故答案为: $2\sqrt{2}$.

(2) 以 BP 为边向下作等边三角形 BPQ ,

连结 CQ ,



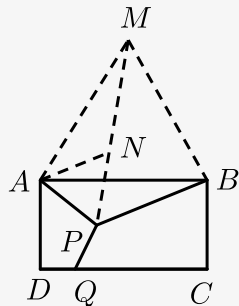
$\because \triangle ABC, \triangle BPQ$ 是等边三角形 ,
 $\therefore BA = BC, BP = BQ, \angle ABC = \angle PBQ = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ABP = \angle CBQ$,
 在 $\triangle BAP$ 和 $\triangle BCQ$ 中 ,

$$\begin{cases} BA = BC \\ \angle BAP = \angle CBQ , \\ BP = BQ \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BAP \cong \triangle BCQ$,
 $\therefore \angle BPA = \angle BQC$,
 $\therefore AP = CQ = 4$,
 $\because PB = PQ = 2, PC = 2\sqrt{5}$,
 $\therefore PQ^2 + CQ^2 = PC^2$,
 $\therefore \angle PQC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BQC = \angle BQP + \angle PQC = 150^\circ$,
 $\therefore \angle APB = 150^\circ$.

故答案为： $\angle APB = 150^\circ$.

- (3) 分别以 AB, AP 为边向上作等边 $\triangle ABM$,
 等边 $\triangle APN$, 连结 MN ,



$\because \triangle ABM, \triangle APN$ 是等边三角形 ,
 $\therefore AB = AM, AP = AN, \angle MAB = \angle NAP = 60^\circ$,
 $\therefore \angle MAN = \angle BAP$,
 在 $\triangle AMN$ 和 $\triangle ABP$ 中 ,

$$\begin{cases} AM = AB \\ \angle MAN = \angle BAP, \\ AN = AP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AMN \cong \triangle ABP,$$

$$\therefore MN = BP,$$

$$\therefore PA + PB + PQ = PN + MN + PQ,$$

当且仅当 M, N, P, Q 四点共线,

且 $MQ \perp CD$ 时, $PA + PB + PQ$ 取得最小值,

$$\because AB = 900\text{m}, AD = 600\text{m},$$

$$\therefore (PA + PB + PQ)_{\min} = \frac{900}{2} \times \sqrt{3} + 600$$

$$= (450\sqrt{3} + 600)\text{m},$$

$$\therefore \text{这三条下路之和的最小值是 } (450\sqrt{3} + 600)\text{m}.$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

7. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中有矩形 $OABC$, $A(4, 0)$, $C(0, 2)$, 将矩形 $OABC$ 绕原点 O 逆时针旋转得到矩形 $OA'B'C'$.

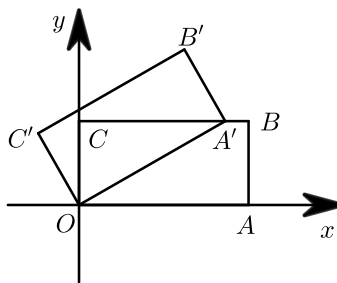


图 1

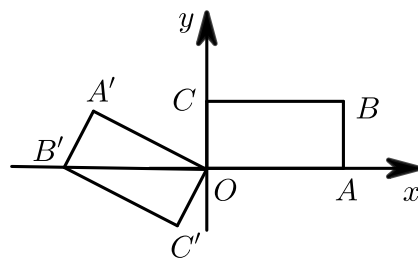


图 2

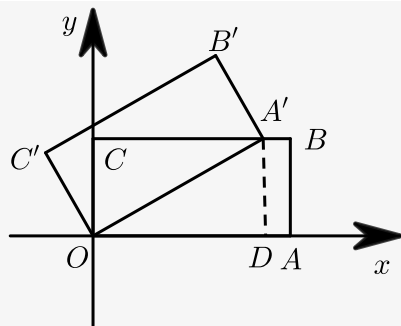
- (1) 如图1, 当点 A' 首次落在 BC 上时, 求旋转角;
- (2) 在 (1) 的条件下求点 B' 的坐标;
- (3) 如图2, 当点 B' 首次落在 x 轴上时, 直接写出此时点 A' 的坐标

【答案】(1) 30° .

(2) $B'(2\sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3})$.

(3) $A'\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

【解析】(1) 如图, 过点 A' 作 $A'D \perp x$ 轴, 垂足为 D ,



$$\therefore A(4,0), B(4,2), C(0,2),$$

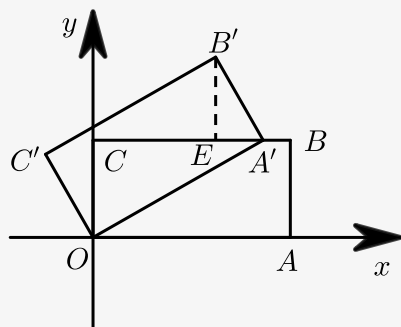
$$\therefore OA = OA' = 4, A'D = B'A' = OC = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OA'D \text{ 中, } A'D = \frac{1}{2}OA',$$

$$\therefore \angle A'OD = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{旋转角为 } 30^\circ.$$

(2) 如图, 过点 B' 作 $B'E \perp BC$, 垂足为 E ,



$$\therefore BC \parallel AO,$$

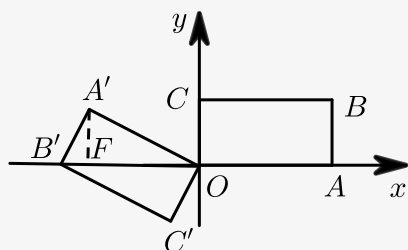
$$\therefore \angle OA'C = \angle A'OA = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B'A'E = 60^\circ, A'C = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore A'E = 1, B'E = \sqrt{3},$$

$$\therefore B'(2\sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3}).$$

(3) 如图, 作 $A'F \perp x$ 轴, 垂足为 F ,



$$\therefore \angle B'A'O = 90^\circ, A'F \perp B'O,$$

$$\therefore B'O = 2\sqrt{5}, \triangle B'A'O \sim \triangle A'FO,$$

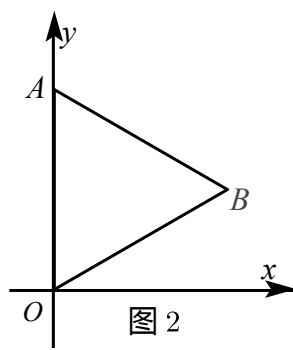
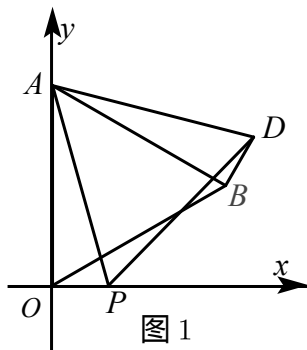
$$\therefore \frac{OB'}{OA'} = \frac{OA'}{OF},$$

$$\therefore OA = \frac{8\sqrt{5}}{5}, A'F = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore A' \left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5} \right).$$

【标注】【知识点】坐标系中的旋转

8. 如图1, 在平面直角坐标系中, 已知 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 点 A 的坐标是 $(0, 4)$, 点 B 在第一象限, 点 P 是 x 轴上的一个动点, 连接 AP , 并把 $\triangle AOP$ 绕着点 A 按逆时针方向旋转, 使边 AO 与 AB 重合, 得到 $\triangle ABD$.



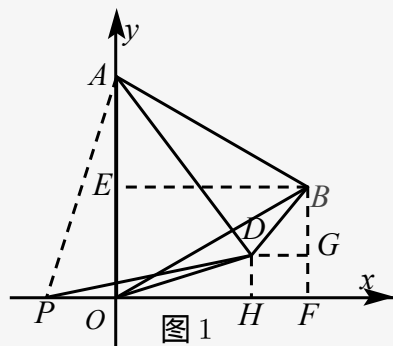
- (1) 求直线 AB 的解析式.
- (2) 当点 P 运动到点 $(\sqrt{3}, 0)$ 时, 求此时 DP 的长及点 D 坐标.
- (3) 是否存在点 P , 使 $\triangle OPD$ 的面积等于 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 若存在, 请求出符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$.

(2) $\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{7}{2} \right)$.

(3) 存在, $P_1 \left(\frac{\sqrt{21} - 2\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$, $P_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$, $P_3(-\sqrt{3}, 0)$,
 $P_4 \left(-\frac{\sqrt{21} - 2\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$.

【解析】(1) 如图1, 过点 B 作 $BE \perp y$ 轴于点 E , 作 $BF \perp x$ 轴于点 F .



由已知得:

$$BF = OE = 2, OF = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

∴点B的坐标是 $(2\sqrt{3}, 2)$

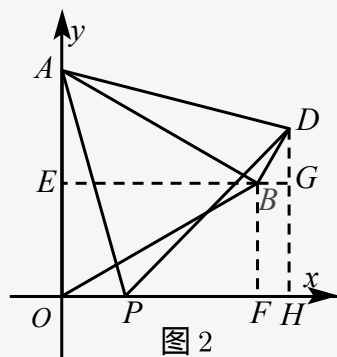
设直线AB的解析式是 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\text{则有} \begin{cases} 4 = b \\ 2 = 2\sqrt{3}k + b \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 4 \end{cases}$$

∴直线AB的解析式是 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$.

(2) 方法一: 如图2, ∵ $\triangle ABD$ 由 $\triangle AOP$ 旋转得到,



∴ $\triangle ABD \cong \triangle AOP$,

∴ $AP = AD$, $\angle DAB = \angle PAO$,

∴ $\angle DAP = \angle BAO = 60^\circ$,

∴ $\triangle ADP$ 是等边三角形,

$$\therefore DP = AP = \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{19}.$$

如图2, 过点D作 $DH \perp x$ 轴于点H, 延长EB交DH于点G, 则 $BG \perp DH$.

在 $\text{Rt}\triangle BDG$ 中, $\angle BGD = 90^\circ$, $\angle DBG = 60^\circ$.

$$\therefore BG = BD \cdot \cos 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$DG = BD \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore OH = EG = \frac{5}{2}\sqrt{3}, DH = \frac{7}{2}$$

∴点D的坐标为 $(\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{7}{2})$

方法二: 易得 $\angle AEB = \angle BGD = 90^\circ$, $\angle ABE = \angle BDG$,

∴ $\triangle ABE \sim \triangle BDG$,

$$\therefore \frac{BG}{AE} = \frac{DG}{BE} = \frac{BD}{AB}; \text{而 } AE = 2, BD = OP = \sqrt{3}, BE = 2\sqrt{3}, AB = 4$$

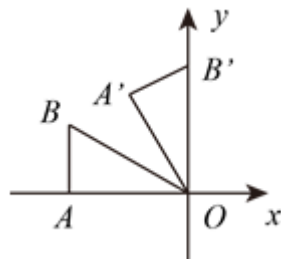
$$\text{则有 } \frac{BG}{2} = \frac{DG}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 解得 } BG = \frac{\sqrt{3}}{2}, DG = \frac{3}{2};$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OPD \text{ 的面积等于 } \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \therefore \frac{1}{2}(-t) \left[- \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right] &= \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \text{解得 } t_1 &= \frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3} \text{ (舍去)}, t_2 = -\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3} \\ \therefore \text{点 } P_4 \text{ 的坐标为 } &\left(-\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}, 0 \right), \\ \text{综上所述, 点 } P \text{ 的坐标分别为 } &P_1 \left(\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}, 0 \right), P_2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right), \\ &P_3(-\sqrt{3}, 0), P_4 \left(-\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}, 0 \right). \end{aligned}$$

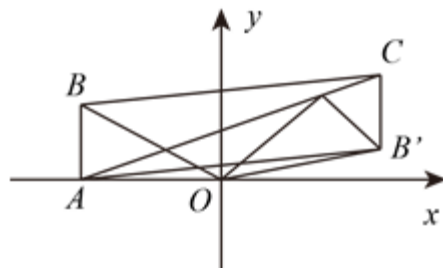
【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

9. 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 点 A 坐标为 $(-2\sqrt{3}, 0)$, $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle AOB = 30^\circ$, 将 $\triangle OAB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转, 旋转角为 α ($0^\circ < \alpha \leq 150^\circ$), 在旋转过程中, 点 A 、 B 的对应点分别为点 A' 、 B' .

(1) 如图, 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 直接写出点 A' _____、 B' _____ 的坐标.



(2) 如图, 当 $\alpha = 135^\circ$ 时, 过点 B' 作 AB 的平行线交 AA' 延长线于点 C , 连接 BC , AB' .



- ① 判断四边形 $AB'CB$ 的形状, 并说明理由.
 - ② 求此时点 A' 和点 B' 的坐标.
- (3) 当 α 由 30° 旋转到 150° 时, (2) 中的线段 $B'C$ 也随之移动, 请求出 $B'C$ 所扫过的区域的面积?
(直接写出结果即可).

【答案】 (1) $(-\sqrt{3}, 3)$; $(0, 4)$

(2) ① 四边形 $AB'CB$ 是平行四边形, 证明见解析.

② 点 $A'(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, 点 $B'(\sqrt{6} + \sqrt{2}, \sqrt{6} - \sqrt{2})$.

(3) $B'C$ 扫过的面积为12 (注: $B'C$ 扫过的图形是平行四边形).

【解析】(1) $A'(-\sqrt{3}, 3)$, $B'(0, 4)$

(2) ① 四边形 $AB'CB$ 是平行四边形. 理由: 如图2,

$$\because B'C \parallel AB,$$

$$\therefore \angle B'CA = \angle BAC,$$

$$\text{又} \because \angle BAC + \angle CAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B'CA' + \angle CAO = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle B'A'C + \angle OA'A = 90^\circ, \text{且由旋转得 } OA = OA', \text{则}$$

$$\angle CAO = \angle OA'A,$$

$$\therefore \angle B'CA' = \angle B'A'C,$$

$$\therefore B'C = B'A',$$

$$\text{又} \because A'B' = AB,$$

$$\therefore B'C = AB,$$

$$\therefore \text{四边形 } AB'CB \text{ 是平行四边形.}$$

② 过点 A' 作 $A'E \perp x$ 轴, 垂足为 E ,

$$\text{由点 } A(-2\sqrt{3}, 0) \text{ 可得 } OA = 2\sqrt{3},$$

$$\text{又} \because \angle OAB = 90^\circ, \angle AOB = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2, OB = 4, \text{则 } OA' = 2\sqrt{3},$$

$$A'B' = 2,$$

$$\text{由 } \angle AOA' = 135^\circ, \text{则 } \angle A'OE = 45^\circ,$$

$$\therefore OE = A'E = \frac{\sqrt{2}}{2} OA' = \sqrt{6},$$

$$\therefore \text{点 } A'(\sqrt{6}, \sqrt{6}),$$

$$\text{过点 } B' \text{ 作 } B'F \perp A'E, \text{垂足为点 } F,$$

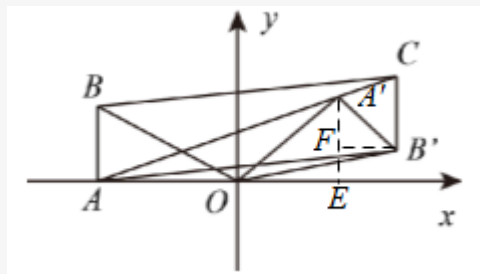
$$\text{由 } \angle EA'O = 45^\circ, \text{得 } \angle EA'B' = 45^\circ,$$

$$\therefore B'F = A'F = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2},$$

$$\therefore EF = \sqrt{6} - \sqrt{2}, OE + B'F = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

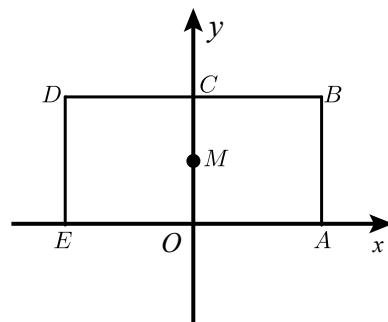
$$\therefore \text{点 } B'(\sqrt{6} + \sqrt{2}, \sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

(3) $B'C$ 扫过的面积为12 (注: $B'C$ 扫过的图形是平行四边形).



【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

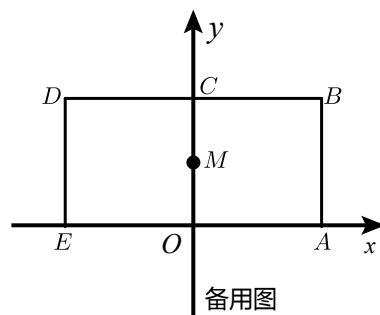
如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABDE$ 的边 $AB = 4$ ， $BD = 8$ ，点 $B(4, 4)$ ，点 A ，点 E 都在 x 轴上， BD 与 y 轴交于点 C ，点 M 是矩形 $ABDE$ 的对称中心。



(1) 写出点 M 的坐标。

(2) 现将线段 OM 绕点 O 顺时针旋转得到 OM' ，旋转角为 α ，连结 AM' ，以 AM' 为边作正方形 $AM'PQ$ （点 A 、 M' 、 P 、 Q 成顺时针排列）。

- ① 若 $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ ， $PQ \parallel BD$ 时，求旋转角 α 的度数。
- ② 若 $0^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ ，直线 PQ 与直线 BD 所成的夹角为 30° 时，求旋转角 α 的度数。
- ③ 若 $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ ，请直接写出线段 PQ 与线段 BD 存在交点时旋转角 α 的取值范围。（直接写出结果即可）



【答案】 (1) $M(0, 2)$ 。

(2) ① 90° ，

② 30° 或 150° 。

③ 当 $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ 时或 $180^\circ \leq \alpha \leq 225^\circ$ 时，
线段 PQ 与线段 BD 存在交点。

【解析】 (1) 由题意可得，四边形 $ABCD$ ，四边形 $OCDE$ 是正方形，边长都是4，

$\because M$ 是矩形 $ABDE$ 的对称中心，

$\therefore OM = MC = 2$ ，

$\therefore M(0, 2)$ 。

(2) ① 如图1中，点 M' 在 OA 上时， $PQ \parallel BA$ ，此时旋转角为 90° 。

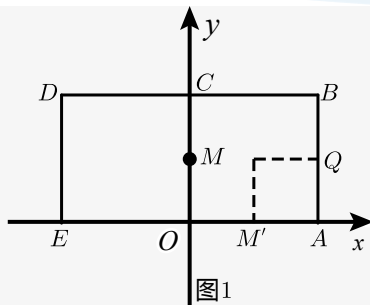


图1

② 如图2中，作 $M'H \perp OA$ 于 H .

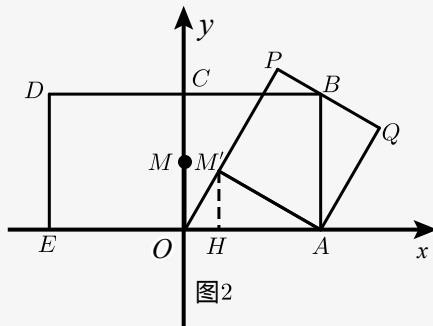


图2

$\therefore$ 直线 PQ 与直线 BD ，所成夹角为 30° ，

$\therefore$ 直线 AM' 与 x 轴的夹角为 30° ，设 $M'(a, b)$ ，

$$\text{则有 } \frac{b}{4-a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore a = 4 - \sqrt{3}b,$$

在 $\text{Rt}\triangle OHM'$ 中，

$$\therefore M'O^2 = HM'^2 + OH^2,$$

$$\therefore (4 - \sqrt{3}b)^2 + b^2 = 2^2,$$

$$\therefore b = \sqrt{3}, a = 1,$$

$$\therefore \tan \angle OM'H = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle MOM' = \angle OM'A = 30^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ,$$

如图3，当直线 PQ 与直线 BD 所成夹角为 30° ，同法可得 $\alpha = 150^\circ$.

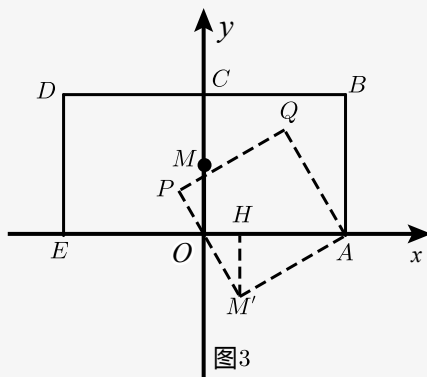


图3

综上所述，当直线 PQ 与 BD 夹 30° 时，旋转角为 30° 或 150° .

③ 设 $M'(a, b)$ ，则 $P(a+b, b+4-a)$ ， $Q(4+b, 4-a)$ ，

如图4中，当线段PQ经过点B时，

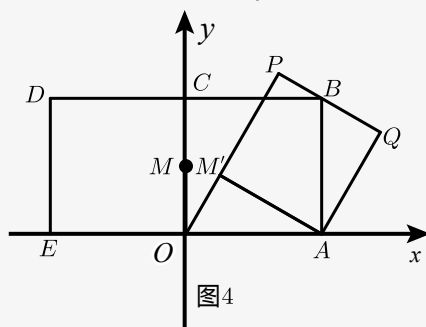


图4

易证 $\triangle AM'O \cong \triangle AQB$ ，可得 $\angle OM'A = 90^\circ$ ，

$\therefore OM' = 2$ ， $OA = 4$ ，得 $OA = 2OM'$ ，

$\therefore \angle OAM' = 30^\circ$ ， $\angle ADM' = 60^\circ$ ，

$\therefore \alpha = 30^\circ$ 。

如图5中，当P在线段BD上时，

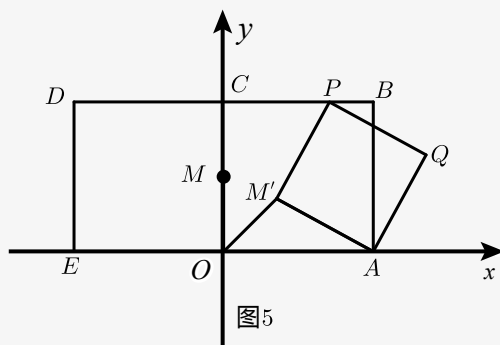


图5

$b + 4 - a = 4$ ，可得 $a = b$ ， $\alpha = 45^\circ$ 。

如图6中，当Q在线段BD上时，

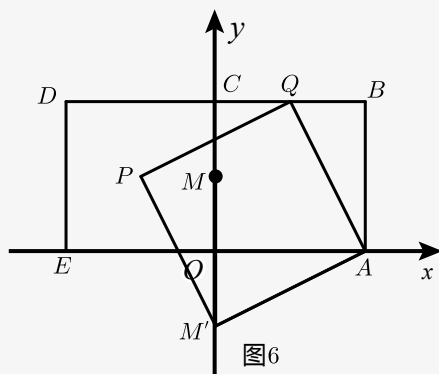
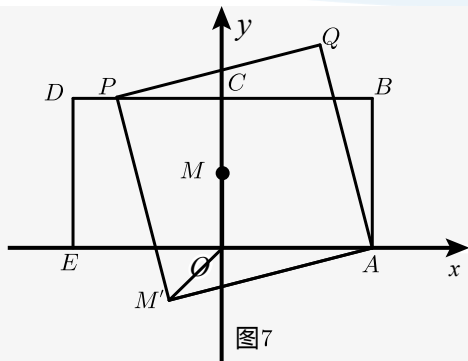


图6

$4 - a = 4$ ，可得 $a = 0$ ， $\alpha = 180^\circ$ 。

如图7中，当P在线段BD上时，

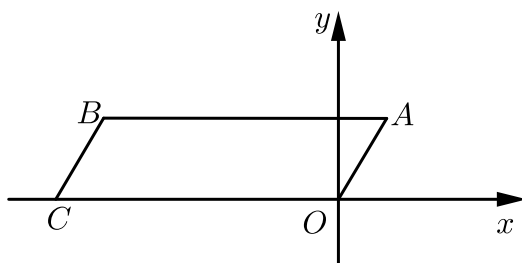


$b + 4 - a = 4$, 可得 $a = b$, $\alpha = 225^\circ$,
 综上所述, 当 $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ 时或 $180^\circ \leq \alpha \leq 225^\circ$ 时,
 线段 PQ 与线段 BD 存在交点.

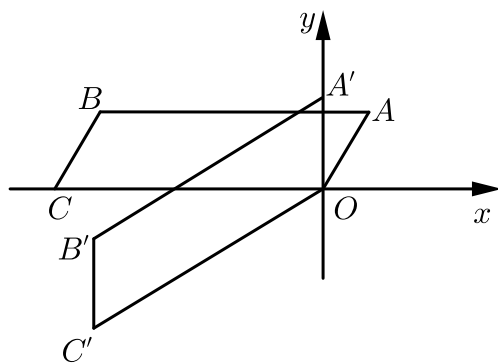
【标注】【知识点】坐标系中的旋转

11. 将平行四边形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中, O 为原点, 点 $C(-6, 0)$, 点 A 在第一象限, $OA = 2$, $\angle A = 60^\circ$.

(1) 如图①, 求点 A 的坐标.



(2) 如图②, 将平行四边形 $OABC$ 绕点 O 逆时针旋转得到平行四边形 $OA'B'C'$, 当点 A 的对应点 A' 落在 y 轴正半轴上时, 求旋转角及点 B 的对应点 B' 的坐标.



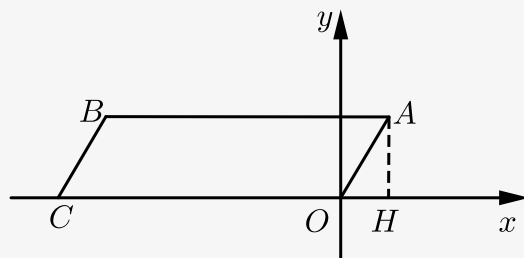
(3) 将平行四边形 $OABC$ 绕点 A 旋转得到平行四边形 $DAEF$, 当点 B 的对应点 E 落在直线 OA 上时, 求直线 EF 的表达式 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) A 点的坐标为 $(1, \sqrt{3})$.

(2) 旋转角度为: 30° , B' 的坐标为 $(-3\sqrt{3}, -1)$.

(3) 直线 EF 的解析式为： $y = -\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$ 或 $y = -4\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$.

【解析】(1) 如图，过点 A 作 $AH \perp x$ 轴于点 H ，



$\because$ 四边形 $OABC$ 为平行四边形，

$\therefore AB \parallel OC$ ，

$\therefore \angle AOH = \angle BAO = 60^\circ$ ，

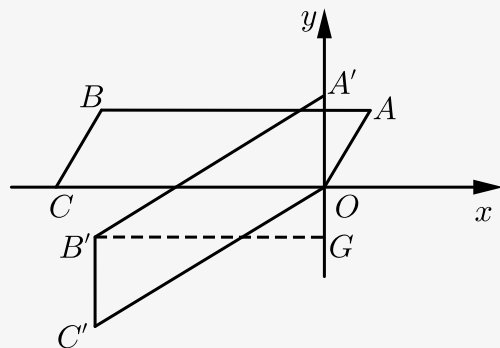
在 $\text{Rt}\triangle AOH$ 中，

$$OH = OA \cdot \cos \angle AOH = OA \cdot \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

$$AH = OA \cdot \sin \angle AOH = OA \cdot \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$\therefore A$ 点的坐标为 $(1, \sqrt{3})$ 。

(2) 如图，过点 B' 作 $B'G \perp y$ 轴于点 G ，



$\because$ 四边形 $OABC$ 为平行四边形，

$\therefore AB \parallel OC$ ，

$\therefore \angle COA + \angle A = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle COA = 180^\circ - \angle A = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle AOA' = \angle COA - \angle COA' = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 旋转角度为： 30° ，

$\therefore C(-6, 0)$ ，

$\therefore OC = 6$ ，

$\because$ 四边形 $OABC$ 为平行四边形，

$\therefore AB = OC = 6$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $OA'B'C'$ 由平行四边形 $OABC$ 旋转得到，

$$\therefore \angle B'A'O = \angle BAO = 60^\circ, A'B' = AB = 6, OA' = OA = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle A'B'G$ 中,

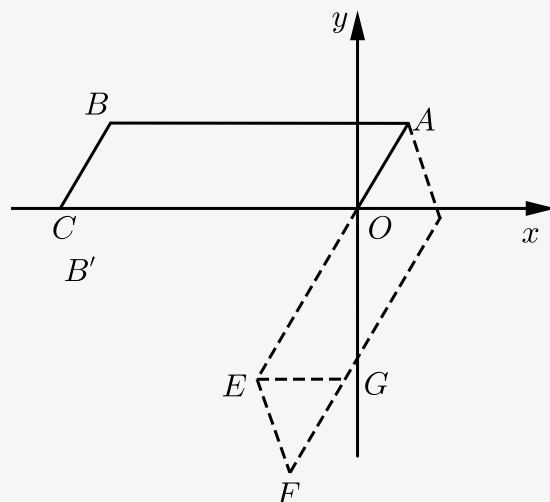
$$B'G = A'B' \cdot \sin \angle B'A'O = A'B' \cdot \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$$

$$A'G = A'B' \cdot \cos \angle B'A'O = A'B' \cdot \cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3,$$

$$\therefore OG = A'G - OA' = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore B' \text{ 的坐标为 } (-3\sqrt{3}, -1).$$

(3) ①当 E 点在第三象限时, 如图所示,



此时, $OE = 4$,

过 E 点作 $EG \perp y$ 轴于 G 点,

$$\therefore \angle EOG = 30^\circ, \angle OEG = 60^\circ,$$

$$\therefore EG = 2, OG = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore E(-2, -2\sqrt{3}),$$

$$\therefore OA = \sqrt{3}$$

$$\therefore EF = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{直线 } EF \text{ 的解析式为: } y = -\sqrt{3}x + b,$$

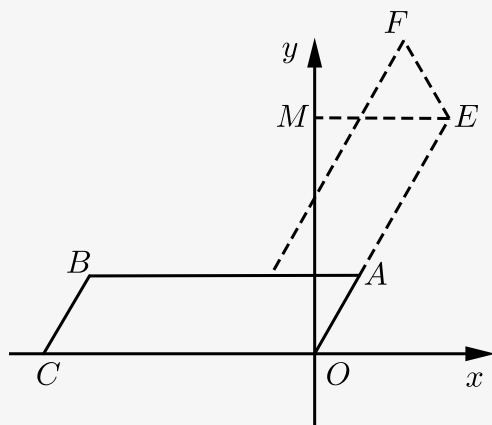
将 $E(-2, -2\sqrt{3})$ 代入得:

$$-2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + b$$

$$\therefore b = -4\sqrt{3},$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}.$$

②当 E 点在第一象限时, 过 E 点作 $EM \perp y$ 轴于 M 点,



$$\because \angle AEF = 120^\circ, OA = \sqrt{3},$$

$$\therefore EF = -\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{此时 } EF \text{ 的解析式为: } y = -\sqrt{3}x + b,$$

$$\text{又} \because OE = 8, \angle MOE = 30^\circ,$$

$$\therefore ME = 4, OM = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore E(4, 4\sqrt{3}),$$

$$\therefore \text{将 } E(4, 4\sqrt{3}) \text{ 代入 } y = -\sqrt{3}x + b \text{ 中得:}$$

$$4\sqrt{3} = -4\sqrt{3} + b$$

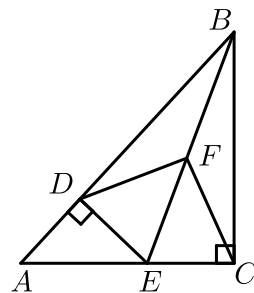
$$\therefore b = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore y = -4\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}.$$

$$\text{综上所述, 直线 } EF \text{ 的解析式为: } y = -\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} \text{ 或 } y = -4\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

12. 如图(1), 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, 且 $DE \perp AD$, 连接 BE , 点 F 为 BE 的中点, 连接 DF, CF .



图(1)

- (1) 观察猜想; 线段 DF 和 CF 的数量关系为 _____; DF 和 CF 的位置关系为 _____.
- (2) 探究证明: 把 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转到如图(2)所示的位置, 试判断(1)中的关系是否仍然成立. 如果成立, 请加以证明; 如果不成立, 请说明理由.

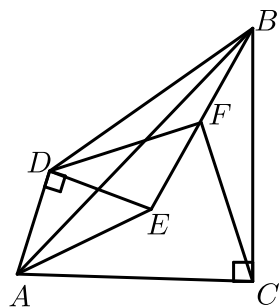


图 (2)

(3) 拓展应用：若 $AB = 13$, $AD = 5$, 把 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转的过程中 , 请直接写出当 D , E , B 三点共线时 CF 的长度 .

【答案】 (1) $DF = CF$; $DF \perp CF$

(2) 成立 , 证明见解析 .

(3) CF 的长为 $\frac{7}{2}$ 或 $\frac{17}{2}$.

【解析】 (1) $DF = CF$, $DF \perp CF$.

$$\because \angle ACB = 90^\circ , AC = BC , DE \perp AD ,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ , \angle BDE = \angle ACB = 90^\circ ,$$

又 $\because$ 点 F 是 BE 的中点 ,

$$\therefore DF = EF = BF = \frac{BE}{2} , CF = EF = BF = BE = \frac{BE}{2} ,$$

$$\therefore DF = CF , \angle FDB = \angle FBD , \angle FBC = \angle BCF ,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle FDB + \angle FBD = 2\angle FBD ,$$

$$\angle CFE = \angle FBC + \angle BCF = 2\angle FBC ,$$

$$\therefore \angle DFC = 2\angle FBD + 2\angle FBC = 2\angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\therefore DF \perp CF .$$

(2) 成立 .

如图 (1) , 在 DF 的延长线上截取 $FG = DF$, 连接 BC , CG , 延长 DE , 交 BC 于点 K .

$$\because EF = BF , FG = DF , \angle DFE = \angle BFG ,$$

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle GBF ,$$

$$\therefore BC = ED , \angle BCF = \angle EDF ,$$

$$\therefore BC \parallel DE ,$$

$$\therefore \angle GBC = \angle BKD ,$$

$$\because \angle ADE = \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DKC + \angle DAC = 180^\circ ,$$

又 $\angle DKC + \angle DKB = 180^\circ$,

$\therefore \angle DKB = \angle DAC$,

$\therefore \angle DAC = \angle GBC$,

连接 DC ,

易知 $AD = DE = BG$, $AC = BC$,

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCG$,

$\therefore CD = CG$, $\angle ACD = \angle BCG$,

$\therefore \angle DCC = \angle DCB + \angle BCG = \angle DCB + \angle ACD = 90^\circ$,

$\therefore \triangle DCG$ 是等腰直角三角形 ,

又 $\because$ 点 F 是 DC 的中点 ,

$\therefore DF = CF$, $DF \perp CF$.

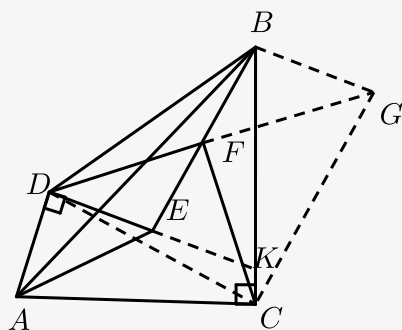


图 (1)

(3) 分两种情况讨论 .

① 当点 D 在直线 AC 上方 , 且 D, E, B 三点共线时 , 如图 (2) .

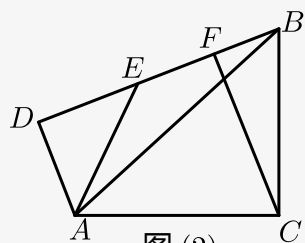


图 (2)

易知 $\angle BDA = 90^\circ$,

$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$,

$\therefore BE = BD - DE = 12 - 5 = 7$,

$\therefore EF = \frac{7}{2}$,

$\therefore CF = DF = DE + EF = 5 + \frac{7}{2} = \frac{17}{2}$;

② 当点 D 在直线 AC 下方 , 且 D, E, B 三点共线时 , 如图 (3) .

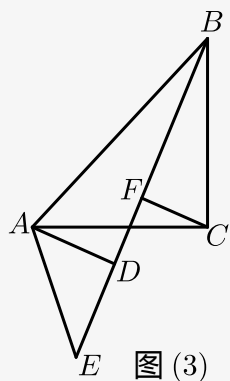


图 (3)

易知 $\angle BDA = 90^\circ$,

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 ,$$

$$\therefore BE = BD + DE = 12 + 5 = 17 ,$$

$$\therefore EF = \frac{17}{2} ,$$

$$\therefore CF = DF = EF - DE = \frac{17}{2} - 5 = \frac{7}{2} .$$

综上所述, 当 D, E, B 三点共线时, CF 的长为 $\frac{7}{2}$ 或 $\frac{17}{2}$.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用